Random Walk를 이용한 장수리스크 시뮬레이션과 리스크 관리 방안 제안

서울대학교 자유전공학부 박권희

서울대학교 경영대학 박석희

컬럼비아대학교 수학과[1] 김동건

[1] Columbia University Department of Mathematics (NY)

목차

■표/그림 차례

■ 국문요약

1장. 서론

- ☐ 통계청 추계인구 자료에 따르면 우리나라의 노령화 지수는 2010년 68.4%에서 2050년 376.1%에 달할 것으로 예상되며, 2018년에는 65세 이상 인구 구성비가 14% 이상인 고령사회에 진입할 것으로 보임.

- ☐ 생명보험회사의 장수리스크는 더욱 확대될 것으로 예상되지만, 현재 우리나라 생명보험회사들은 장수리스크에 대한 인식이 매우 낮은 수준임.

- ☐ 하지만 빠르게 고령화 되어가고 있는 우리나라 인구구조와 주요 선진국의 사례를 비추어 볼 때, 연금보험의 비중 확대는 불가피할 것으로 보이며, 생명보험회사도 이에 맞게 장수리스크에 대한 관심을 제고해야 함.

- ☐ 본 논문은 기존의 질적 연구와는 달리, 장수리스크를 크게 다음의 3가지 양적 연구를 통해 분석하고자 함.

  - ■ 첫째, 기존의 사망률 모형을 보완하고, Monte-Carlo시뮬레이션을 수행함으로써 장수리스크의 보다 실용적이고 체계적인 측정 방법을 제시하고자 함.

  - ■ 둘째, 시뮬레이션 모형의 결과를 바탕으로, 각 시뮬레이션의 사망률 곡선을 통해 각각의 현재가치(Present Value)를 산출하고, 이의 분포와 Value at Risk (VaR)를 구해보고자 함.

  - ■ 셋째, 생명보험회사가 장수리스크를 관리할 수 있는 방안을 역선택 관리와 자본시장을 이용한 헤징 방식에 초점을 맞추어 제안하고자 함.

2장. 기존 연구와 이론적 배경

- ☐ 미래 실제 사망률과 관련한 리스크는 크게 3가지인데, 장수리스크는 Trend risk처럼 기대 사망률의 추세가 영구적으로 변하는 것을 뜻한다고 볼 수 있음.

- ☐ 앞으로 논의할 장수리스크는 장기적으로 다양한 연령대의 사망률이 기존에 예측하고 있는 사망률 추세와는 다르게 변하는 것을 의미함.

□ 확률적 사망률 모형은 미래 사망률을 예측하고 그 변동성을 측정하는 도구인데, 본 논문은 미래 생존 확률의 시나리오를 생성하기 위해 미래 사망률을 모형화하는 확률적 사망률 모형을 참고하였음.

□ 본 논문은 장수리스크 측정과 관련한 선행 연구들이 다음과 같이 2가지 문제점을 갖는다고 분석하였음.

■ 첫째, 위와 같은 사망률 모형을 바탕으로 한 선행 연구들은 장기적 사망률 추세의 변화를 체계적으로 고려하지 않음.

■ 둘째, 기존 연구들은 기대 사망률과 예측간격(Prediction Interval)을 제시하였지만, 실제 사망률이 어떤 곡선(path)을 따르는 지에 대한 고려를 하지 않음.

3장. 연구방법론

□ 본 연구는 우선 장수리스크 시뮬레이션 모델의 타당성을 검정한 후, 실제 데이터를 바탕으로 시뮬레이션을 돌려 장수리스크를 체계적으로 측정해볼 것임.

□ 다음으로 본 연구는 실제 시뮬레이션 결과를 바탕으로 연금의 가격을 측정(Pricing)한 후, 최종적으로 생명보험회사의 입장에서 장수리스크를 관리할 수 있는 방안에 대한 논의를 진행할 것임.

□ 시뮬레이션 모델의 경우, 기존 연구의 문제점을 해결하는 방안으로 본 논문은 Stochastic Process term (C_t)를 통해 사망률이 랜덤워크를 따르게 함.

□ 가격책정(Pricing)의 경우, Monte-Carlo Simulation과 PV 산출식을 이용하여 연금의 현재가치(Present Value)를 산출해볼 것임. 추가적으로 본 연구는 (1-α)%의 신뢰수준에서 예측되는 최대 손실을 뜻하는 VaR을 구할 것임.

□ 본 논문은 위의 연구 분석을 위해 실제 1961년부터 2007년까지, 영국의 47개년간의 사망률 데이터를 사용함.

4장. 연구 결과 및 해석

- □ 앞서 연구방법에서 언급했던 시뮬레이션 모델과 가정들의 타당성을 검정하기 위해, 본 연구는 첫째, ln C_t/C_(t-1) 의 기대값과 변동성이 나이에 독립적이고 둘째, ln C_t/C_(t-1) 가 정규분포를 따른다는 것을 보임.
- □ 앞서 모델의 타당성을 검증했으므로 본 논문은 연구방법에서 제시한 모델을 이용해 각 나이대별로 5000여개의 사망률 곡선을 생성하여, 60세부터 90세까지의 사망률이 연도별로 어떻게 변화하는지를 보여줌.
- □ 다음으로 본 연구는 Monte-Carlo Simulation을 이용해 장수화 리스크를 고려한 PV와 그 분포 그리고 VaR를 산출함.

5장. 장수리스크 관리 방안

- □ 제5장에서는 두 가지 차원에서 장수리스크를 관리할 수 있는 방법을 연구함.
  - ■ 첫째, 역선택으로 인한 장수리스크가 발생할 수 있음을 탐지하고, 이를 좀 더 정확하게 관리할 수 있는 방안을 제시함.
  - ■ 둘째, 자본시장을 통해 장수리스크를 분산시키는 헤징(Hedging)이 가능함을 수리적으로 분석해봄으로써 장수리스크를 관리하는 방법을 제안함.
- □ 본 연구는 첫째, 역선택이 보험회사에 장수리스크를 증폭시키고 있는지 판단할 수 있는 모델을 만들고, 이를 통해, 장수리스크를 최소화시키는 것이 가능함을 보임.
  - ■ 이 모델은 역선택이 있을 경우, 미래에 유동성이 충분한 장수리스크 파생상품 시장이 형성이 되고 거래되더라도, 완벽한 헤징을 기대하기 힘들 수 있다는 것을 알려줌.
- □ 만약, 유동성이 충분한 장수리스크 파생상품 시장이 존재한다면 선물, 옵션 등을 이용하여 다양한 헤징 전략을 취하고 Black-Scholes formula 등을 이용하여 선물의 공정가격 등을 산출해 볼 수 있겠지만 현재 그런 파생상품 시장은 한국에 존재하지 않음.
- □ 따라서 본 논문은 둘째, 파생상품을 이용한 헤징 대신 유동성이 큰 자본시장에서 포트폴리오 이론을 토대로 장수리스크를 헤징할 수 있는 방법을 제안함.

- ■ 본 연구는 분산투자로 최소화시킬 수 있는 금융상품들의 고유 리스크를 제외한 나머지 리스크를 3개의 포트폴리오로 구성해 제거함.

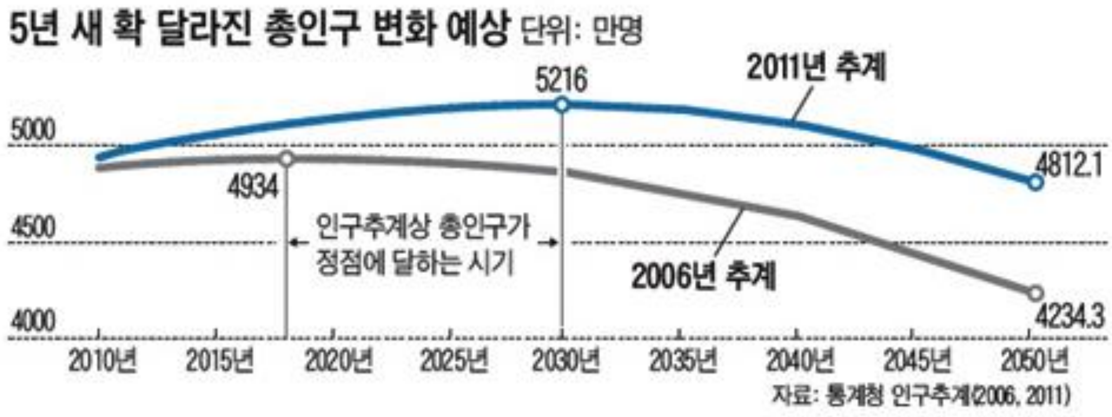
6장. 결론 및 한계

- □ 본 연구의 주제인 고령화 문제는 현재 전세계적으로 큰 화두로 떠오르고 있으며, 앞으로 우리나라에서도 생명보험회사를 중심으로 이와 관련한 논의가 활발히 진행될 것으로 보임.
- □ 하지만 국내외적으로 장수리스크의 측정과 관리에 대한 기존 연구들은 동일한 모델을 바탕으로 일정 수준 이상의 논의를 이끌어내지 못하고 있으며, 실제 그 분석에도 많은 한계를 담고 있는 것이 사실임.
- □ 이에 본 논문은 크게 1) 측정, 2) 가격책정, 3) 관리방안 이렇게 3 가지 양적 연구를 통해, 생명보험회사들로 하여금 장수리스크에 대한 관심을 높이고, 기존 연구들의 분석을 넘어서 보다 현실적이고 체계적인 분석을 담고자 하였음.
- □ 하지만 본 논문은 다음과 같은 연구 한계를 가짐.
  - ■ 본 연구는 본래 국내 시장의 데이터를 바탕으로, 우리나라의 장수리스크를 측정하고 이를 분석해보려고 하였지만, 통계청을 통해 얻을 수 있는 데이터는 불과 12 개년밖에 되지 못했고, 본 논문은 연구의 정확성을 위해 불가피하게 영국 시장의 데이터를 사용할 수밖에 없었음.
  - ■ 또한 본 논문은 시뮬레이션을 통해 연금의 현재가치를 구하는 데는 성공하였지만, 기업의 의뢰를 받지 않고 독립적으로 연구를 수행하는 대학 학부생의 입장에서, 생명보험회사의 내부 데이터를 구하는 일은 쉽지 않았음.
  - ■ 본 논문은 외국에서 새롭게 유입되는 인구가 없음을 가정하고 연구를 진행하였고, 따라서 인구 유입이 많은 국가에서 본 연구 모델을 사용한다면, 그에 따른 추가적인 고려가 필요할 것으로 보임.
  - ■ 그리고 우리는 리스크 관리 방안에서 다양한 변수들이 유의미한 상관관계를 가진다고 가정했지만, 이를 실질적인 테스트로 검증하지 못하였음. 따라서 이에 대한 연구가 앞으로 더 필요할 것으로 보임.

제 1 장. 서론

1.1 연구의 배경

통계청 추계인구 자료[2]에 따르면 우리나라의 노령화 지수는 2010 년 68.4%에서 2050 년 376.1%에 달할 것으로 예상되며, 2018 년에는 65 세 이상 인구 구성비가 14% 이상인 고령사회에 진입할 것으로 보인다. 이러한 고령화 추세는 점점 가속화될 것으로 보이며, 특히 2060 년에는 생산가능인구 10 명이 노인 8 명과 어린이 2 명을 부양하게 되어 총 부양비가 101.0%로[3] 세계 최고치에 이를 전망이다. 하지만 고령화에 대한 전세계적인 관심과는 대조적으로, 현재 국내의 고령화에 대한 연구는 매우 미비한 실정이다. 특히 통계청의 2011 년 장래인구추계 예측은 지난 2006 년 예측에서 크게 달라진 것을 볼 수 있다.[4] 이 사실은 현재 우리나라에서 고령화 추세에 대한 연구가 정확히 이루어지지 못하고 있음을 시사한다.



[그림 1] 통계청의 인구추계 예측 변화 - 2011년, 2006년 자료: 조선일보

이러한 예상 외의 인구추이 변화는 국가적으로는 연금 등 복지 정책의 수정을 불가피하게 만든다. 또한 은퇴연령 예측 오류에 따른 은퇴기간 증가와 기대수명(사망연령) 예측 오류는 생명보험회사에게 큰 리스크로 작용할 것으로 보인다. 특히 연금보험을 포함하는 생존보험은

[2] 통계청(2011), 장래인구추계자료.

[3] 통계청(2011), 장래인구추계자료.

[4] 조선일보(2011.12.8), "인구 예상치 5년새 뒤바뀌어... 연금정책 차질".

우리나라 생명보험회사의 수입보험료 중 30% 이상의 비중을 차지할 정도로 큰 규모이며,[5] 노후소득에 대한 관심이 증가하면서 시장의 크기는 앞으로 더욱 커질 것으로 예상된다. 이처럼 생명보험회사의 장수리스크는 더욱 확대될 것으로 예상되지만, 현재 우리나라 생명보험회사들은 장수리스크에 대한 인식이 매우 낮은 수준이다. 실제 우리나라에서는 장수파생상품의 주 수요층인 확정급여형(DB, Defined Benefit) 퇴직연금을 제공하는 기업이 거의 없으며, 연금부채 규모가 증가함에도 연금보험율이 낮게 유지되고 종신연금 전환율이 높지 않다.

하지만 빠르게 고령화 되어가고 있는 우리나라 인구구조와 주요 선진국의 사례를 비추어 볼 때, 연금보험의 비중 확대는 불가피할 것으로 보이며, 생명보험회사도 이에 맞게 장수리스크에 대한 관심을 제고해야 한다. 특히 국민연금의 수급자는 지속적으로 증가하는 반면, 이를 부양할 근로인구는 지속적으로 감소하고 있고, 이를 관리하는 정부의 노후소득보장 기능이 제한적인 현 상황에서 급격한 고령화는 개인의 사적연금 수요 증가를 낳아 생명보험회사의 장수리스크로 이어질 것이다. 또한 베이비부머[6]의 본격적인 은퇴 가속, 핵가족화의 진전, 그리고 급변하는 경제환경은 개인들의 종신연금 수요 증가로 이어질 것이고, 이는 생명보험회사에게 큰 기회이자 리스크로 작용할 것이다. 따라서 생명보험회사들은 장수리스크에 대한 인식을 강화하고 장수리스크의 정확한 측정 및 관리방안에 대한 검토가 필요할 것으로 보인다. 이에 본 논문은 다음의 연구 목적을 통해 생명보험회사의 장수리스크에 대한 관심을 높이고, 장수리스크에 대한 기존 연구들의 분석을 넘어서 보다 현실적인 접근법을 제안하고자 한다.

1.2 연구의 목적 및 의의

우리나라에서도 최근 장수리스크 및 파생상품에 대한 많은 연구가 이루어지고 있지만, 외국의 사례를 소개하고 도입방안을 논의하는 등의 질적 연구 수에 비해, 여전히 장수리스크의 정확한 측정과 가격측정(Pricing) 및 헤징(Hedging)에 관한 양적 연구는 거의 이루어지고 있지 않은 상황이다. 이는 물론 우리나라 시장에서 장수리스크와 관련한 사망률 데이터가 부족하고, 과거의 데이터를 바탕으로 미래의 상황을 예측하는 것 자체가 갖는 불완전성에서 기인하기도 하지만, 아직까지 우리나라에서 장수리스크와 관련해 보다 심도 있는 논의의 필요성을 인식하지 못했기 때문이기도 하다. 따라서 본 논문은 기존의 질적 연구와는 달리, 장수리스크를 크게 다음의 3 가지 양적 연구를 통해 분석하고자 한다.

---

[5] 보험연구원(2013).

[6] 1차 베이비부머는 1955~63년생에 해당하며, 규모는 712만명으로 추산된다. 이는 전체 인구의 14.6%에 달하는 높은 비중을 차지하고 있어 베이비부머의 은퇴는 생명보험회사들에게 큰 기회이자 리스크로 다가올 것으로 평가된다.

첫째, 본 논문은 기존의 사망률 모형을 보완하고, Monte-Carlo 시뮬레이션을 수행함으로써 장수리스크의 보다 실용적이고 체계적인 측정 방법을 제시하고자 한다. 연구자들은 장수리스크 측정과 관련해 해외 및 국내 연구들이 크게 다음의 2 가지 문제점을 갖는다고 판단하였다. 우선, 기존 연구들은 장기적인 사망률 트렌드의 영구적인 변화를 체계적으로 고려하지 않았다. 이를 보완하기 위해, 본 연구는 연구 모형에 실제 사망률이 랜덤워크(Random Walk)를 따른다는 가정을 세워 사망률 트렌드의 영구적인 변화를 고려하였다. 다음으로, 기존 연구들은 기대 사망률과 예측간격(Prediction Interval)을 제시하였지만, 실제 사망률이 어떤 곡선(path)을 따르는 지에 대한 고려를 하지 않았다. 이에 본 연구는 실제 사망률이 가질 수 있는 다양한 곡선(path)을 체계적으로 고려함으로써 장수리스크의 측정과 관련해 기존 연구들이 갖는 이러한 문제점들을 보완하고자 하였다.

둘째, 본 논문은 시뮬레이션 모형의 결과를 바탕으로, 각 시뮬레이션의 사망률 곡선을 통해 각각의 현재가치(Present Value)를 산출하고, 이의 분포와 Value at Risk (VaR)를 구해보고자 한다. 연구자들은 연금의 현재가치가 사망률 곡선에 따라 큰 차이가 있다는 것을 인지하였고,[7] 각각의 사망률 곡선이 갖는 현재가치를 구해봄으로써, 생명보험회사가 판매하는 연금의 현재가치와 손실을 체계적으로 분석해볼 것이다. 이는 기존 연구가 고려하지 못한 사망률의 변화에 따른 현재가치의 변화 추이를 보여줌으로써, 기존 연구가 예측하지 못한 장수리스크로 인한 생명보험회사의 손실을 예측해 볼 수 있다는 점에서 큰 의미를 갖는다.

셋째, 생명보험회사의 장수리스크는 실제 연금지급액과 예상했던 연금지급액의 차이로 정의되는데, 그 발생 경로가 다양하여 리스크의 체계적인 관리가 필요하다. 이에 본 논문은 생명보험회사가 장수리스크를 관리할 수 있는 방안을 다음의 2 가지 방식에 초점을 맞추어 제안하고자 한다. 우선 생명보험회사는 고객들의 역선택(Adverse Selection)으로 인해, 생명보험회사 포트폴리오의 사망률 증가율이 우리나라 전체의 사망률 증가율보다 낮게 되는 장수리스크를 가지게 될 수 있다. 이러한 장수리스크의 관리를 위해, 연구자들은 생명보험회사의 연금 상품 포트폴리오의 가중치를 조정하여 어떻게 리스크를 최소화할 수 있는지 밝히고자 한다. 다음으로 우리나라의 경우 장수리스크를 관리할 수 있는 장수 파생상품 시장이 형성되지 않았기 때문에, 파생상품을 통한 장수리스크의 헤징이 어려운 상황이다. 그래서 본 논문은 파생상품에 의한 헤징 방법에 의존하지 않고, 포트폴리오 이론을 바탕으로 연금 지급액의 성장률과 상관관계가 있는 자본 시장을 이용한 헤징 가능성을 제안하고자 한다. 본 연구의 이러한 장수리스크 관리방안은 기존의 연구들이 제안한 연금상품의 다양화 혹은 시장 확대와 같은 질적인 수준의 헤징 방안보다 현실적이고 실질적이라는 점에서 큰 의의를 가질 것으로 보인다.

---

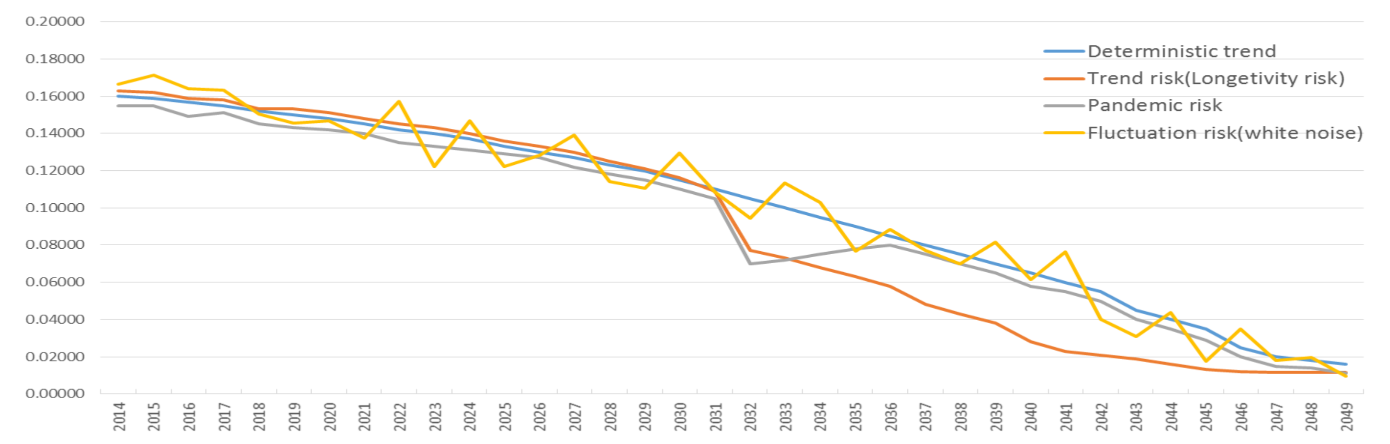
[7] 연금의 현재가치는 사망률 곡선에 종속적이다. (path dependent)

제 2 장. 기존 연구와 이론적 배경

2.1 미래 사망률과 관련한 리스크

Browne et al.(2009)의 연구는 미래 실제 사망률과 관련한 리스크를 크게 3가지로 분류한다. 첫째, Fluctuation risk는 Deterministic trend에 영향을 끼치지 않는 Trend 주위의 Gaussian white noise를 뜻한다. 이를테면 예측할 수 없는 뜨거운 여름이나 온화한 겨울 등의 계절적 요인이 이에 해당한다. 둘째, Pandemic risk는 갑작스러운 요인(Shock)에 의해 사망률이 단기적으로 급변하게 되는 리스크를 말한다. 이 리스크는 시간이 흐르고 나면 사라지는 특징이 있다. 셋째, Trend risk는 Pandemic risk와 마찬가지로 갑작스러운 요인에 의해 사망률이 급변하게 되는 리스크다. 하지만 Pandemic risk와는 다르게 기대 사망률 Trend의 영구적인 변화를 초래한다.

본 연구는 이상의 세 리스크 중 마지막 Trend risk에 초점을 맞추고 있다. 왜냐하면 장수리스크가 바로 Trend risk처럼 기대 사망률의 추세가 영구적으로 변하는 것을 뜻하기 때문이다.



[그림 2] 미래 실제 사망률과 관련한 3가지 리스크 자료: 직접 작성

2.2 장수리스크 정의

본 논문은 장수리스크를 영구적인 사망률 트렌드 변화로 정의하고 연구를 진행했다. 즉, 앞으로 논의할 장수리스크는 장기적으로 다양한 연령대의 사망률이 기존에 예측하고 있는 사망률 추세와는 다르게 변하는 것을 의미한다.

선행 연구들을 분석해 보면, 장수리스크의 정의는 연구 목적에 따라 조금씩 차이가 있다. 하지만 각각의 선행 연구가 보는 장수리스크는 근본적으로 본 논문이 정의하는 장수리스크와 다르

지 않다.

Blake et al.(2006)의 논문에서는 장수리스크를 투자 리스크, 금리 리스크, 인플레이션 리스크 등 재무적인 위험과는 구별되는 개념으로 보고 있다. 또한 CRO Forum(2010)의 연구에서는 장수리스크를 개인이 예상했던 것보다 오래 살게 될 리스크로써 정의하고 이것을 변동성 리스크(Volatility Risk), 사망률 수준 리스크(Mortality Level Risk), 사망률 추세 리스크(Mortality Trend Risk)로 구분했다.[8]

또한 McMinn et al.(2006)은 장수리스크를 연금 수령자와 연금 지급자의 입장에 따라 각각 개별 장수리스크(Individual Longevity Risk)와 총 장수리스크(Aggregate Longevity Risk)로 구분했다. 개별 장수리스크는 실제 평균수명이 길어짐에 따라 노후 생활에 필요한 연금재원이 연금수령자가 적립한 연금자산의 규모보다 커질 때 발생하는 리스크다. 즉 연금수령자의 노후생활 관련 연금리스크(Annuity Risk)를 의미하는 것이다. 반면 총 장수리스크는 특정 연금을 수령하는 집단 전체의 실제 평균수명이 증가함에 따라 연금사업자가 직면하게 되는 리스크를 말한다.

Cairns et al.(2006)은 장수리스크를 장기간에 걸친 연금 수급 기간 중 연금수령자가 예측한 사망률이 실제 사망률보다 높게 나타날 경우 발생하는 리스크로 정의했다. 한편 성주호(2010)는 장수리스크를 실제 실현될 연금 사망률보다 연금 계약 기간 중 적용되는 연금 사망률이 높게 추정되면서 예상되는 계리적 손실 가능성으로 정의했다.

이상의 선행연구들을 종합해 보면, 장수리스크 정의는 연금 주체와 연구 목적 등에 따라 다르게 정의된다. 그런데 결국 각 선행 연구에서 말하는 장수리스크는 미래 사망률 추세가 변함에 따라 생기는 위험이라는 측면에서 의미가 같다.

그렇지만 본 연구는 특히 기업의 관점에서 장수리스크를 정의하고 측정하려고 한다. 우리는 장수리스크로 인해 기업이 부담하게 되는 경제적 리스크에 초점을 맞추고 연구를 진행했다. 이를테면 보험회사의 입장에서 지급해야 하는 실제 연금액이 예상했던 연금 지급액보다 더 커서 생기는 위험 등을 장수리스크 관점에서 연구하고자 했다.

2.3 확률적 사망률 모형

확률적 사망률 모형은 미래 사망률을 예측하고 그 변동성을 측정하는 도구다. 본 논문은 미래 생존 확률의 시나리오를 생성하기 위해 미래 사망률을 모형화하는 확률적 사망률 모형을 참고

[8] 변동성 리스크는 개인이 예상했던 것보다 더 일찍 또는 늦게 사망할 확률적 리스크, 사망률 수준 리스크는 주어진 인구집단에 대한 현재 수준의 사망률 오측 리스크, 사망률 추세 리스크는 기대수명이 추세적으로 증가하여 미래 사망률에 대한 오측 리스크로 정의된다.

했다. 확률적 사망률 모형은 대표적으로 Lee-Carter 모델이 있다. 이는 이산시간 모형(Discrete time model)으로 연단위 사망률 변동을 모형화하는 모델이다. 한편 본 논문은 CBD 모델을 참고하여 연구를 진행했다. CBD 모델은 Lee-Carter 모형이 단일 요인 모형이라는 한계를 보완하기 위해 고안된 모델로서 사망률이 연령과 선형관계를 가진다는 2요인 사망률 모형에 해당한다. 본 연구는 이러한 확률적 사망률 모형에 기초해 있으며, 다음의 Lee-Cater 모델과 CBD 모델은 본 연구의 시뮬레이션 모델의 이해에 필수적이다.

2.3.1 Lee-Cater 모델

Lee-Carter 모델은 1992년 인구통계 학자인 Ronald D. Lee와 Lawrence R. Carter가 개발했다. 이 모형은 로그 사망률이 연령계수와 기간계수로 설명되는 모형이며 다음과 같다.

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

α_x는 연령계수이며 각 연령에 대한 평균 사망률의 패턴을 나타낸다. β_x는 사망률 추세에 대한 각 연령별 민감도를 나타낸다. 기간계수 k_t는 사망지수(Mortality index)라고 하며 전반적인 사망률 트렌드를 나타낸다.

2.3.2 CBD 모델(2요인 사망률 모형)

CBD 모델은 Cairns et al.(2006)의 연구에서 제시됐다. CBD 모델은 사망확률을 변형하여 $logit(q_{x,t}) = \log\frac{q_{x,t}}{(1-q_{x,t})}$이 연령에 대해 선형관계를 갖는다는 사망률 모형이며 다음과 같다.

$$logit(q_{x,t}) = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x})$$

$k_t^{(1)}$는 모든 연령대의 사망률에 영향을 미치는 요인을 말한다. $k_t^{(2)}$는 특정 연령대의 사망률에 직접 영향을 끼치는 요인을 말한다. 즉, 이 모델에서는 시간이 흐름에 따라 변하는 변수가 두 개라는 점에서 2요인 사망률 모형으로 정의된다.

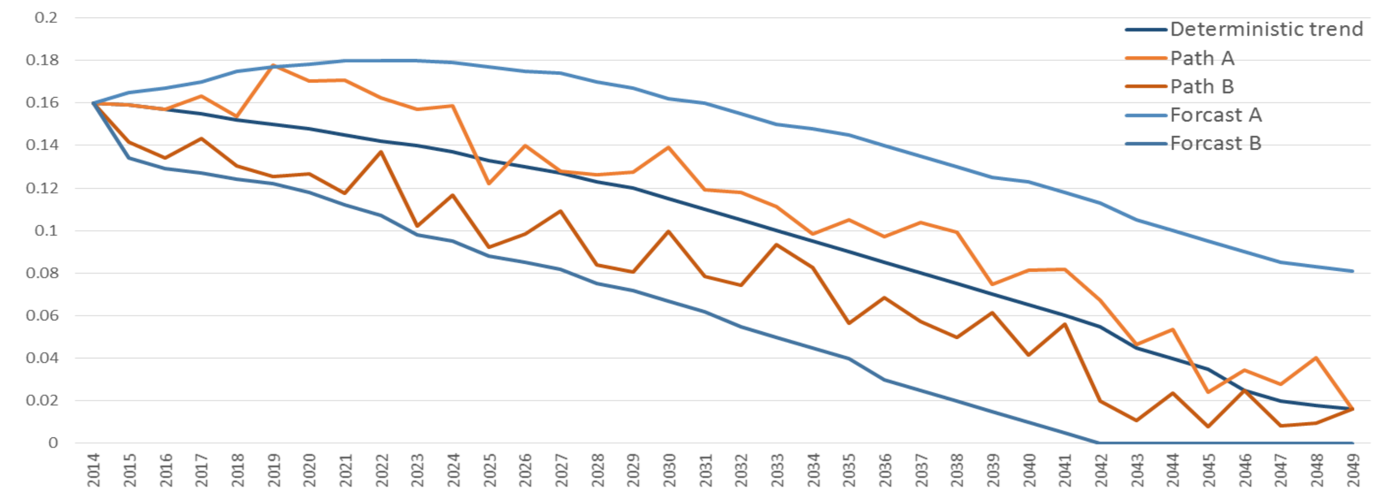
2.4 선행 연구가 갖는 문제점

본 논문은 장수리스크 측정과 관련한 기존 연구들이 다음과 같이 2가지 문제점을 갖는다고 분석하였다.

첫째, 위와 같은 사망률 모형을 바탕으로 한 기존 연구들은 장기적 사망률 추세의 변화를 체계적으로 고려하지 않는다. 구체적으로 Lee-Carter 모델을 바탕으로 한 기존 연구에서는

deterministic trend가 변하지 않을 것이라 가정한 후, 과거의 데이터를 이용해서 미래의 사망률 추세를 예측할 수 있다고 가정한다. 하지만 이는 Deterministic Trend에 어떠한 영구적인 변화가 올 것인지에 대해 체계적인 논의를 담고 있지 않다.

둘째, 기존 연구들은 기대 사망률과 예측간격(Prediction Interval)을 제시하였지만, 실제 사망률이 어떤 곡선(path)을 따르는 지에 대한 고려를 하지 않았다. 아래의 [그림 3]을 통해 알 수 있듯이, 다음의 사망률 가능 곡선 중, path A와 path B는 첫 예측 사망률과 마지막 예측 사망률이 동일함에도 불구하고 Path A의 사망률을 토대로 산출한 연금의 현재가치와 Path B의 사망률을 토대로 산출한 연금의 현재가치는 크게 다를 수 있다.[9] 하지만, 기존의 연구들은 사망률 모형으로 미래 사망률을 예측하고 Forecast Interval을 생성하는 정도에 그치고 있다. 이는 연금의 현재가치의 Path Dependency를 체계적으로 고려하지 않고 있음을 말한다. 이러한 문제는 보험사에게 큰 금전적인 손실을 가져올 수 있다.



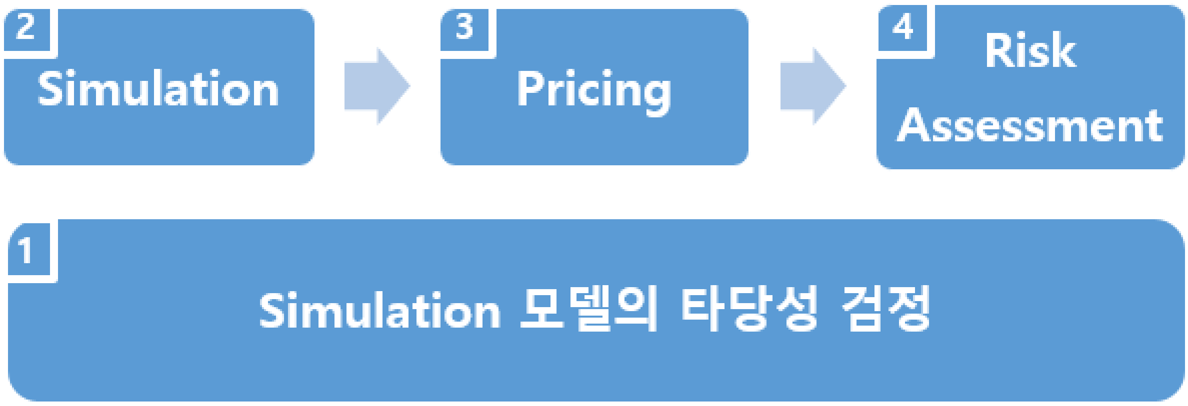
[그림 3] 사망률 가능 곡선 및 Forecast Interval 자료: 직접 작성

[9] 연금의 현재가치는 사망률 곡선에 Path Dependent하다.

제 3 장. 연구 방법론

3.1 연구 방법

본 논문에서는 기존 연구들이 갖는 2가지 문제점인 첫째, 사망률의 장기적 트렌드의 영구적인 변화를 고려하고, 둘째, 예측된 사망률 곡선들에 따른 연금의 현재가치 변화를 고려하여 장수리스크를 체계적으로 측정, 분석할 수 있는 방법론을 제시하고자 한다. 이를 위해 본 연구는 다음의 [그림 4]에서 도식화한 순서대로 장수리스크 시뮬레이션 모델의 타당성을 검정한 후, 실제 데이터를 바탕으로 시뮬레이션을 돌려 장수리스크를 체계적으로 측정해볼 것이다. 다음으로 본 연구는 실제 시뮬레이션 결과를 바탕으로 연금의 가격을 측정(Pricing)한 후, 최종적으로 생명보험회사의 입장에서 장수리스크를 관리할 수 있는 방안에 대한 논의를 진행할 것이다.



[그림 4] 연구 방법 도식화 자료: 직접 작성

3.1.1 시뮬레이션 모델

기존 연구의 문제점을 해결하는 방안으로 본 논문은 Stochastic Process term (C_t)를 통해 (1)과 같이 사망률이 랜덤워크를 따르게 한다. 이를 추가시킴으로써, 본 논문의 시뮬레이션 모델은 첫째, 실제 사망률의 트렌드에 영구적인 변화가 있을 수 있음을 고려하고, 둘째, 조건부 기대값과 크게 상이한 다양한 사망률 곡선을 생성할 수 있게 된다. 또한 본 방법론은 다양한 사망률 모형을 적용시킬 수 있다는 점에서 매우 실용적이라고 할 수 있다. 시뮬레이션 모델은 다음과 같다.

$$q_{x,t} = \hat{q}_{x,t} \times C_t + \varepsilon_{x,t} \qquad (1)$$

여기에서, 연도 t일때의 연령을 x라 할 경우 변수는 다음을 의미한다.

$q_{x,t}$: 실제 사망률 [0,1]

$\hat{q}_{x,t}$: 기대 사망률

C_t : Stochastic Process (Random Walk: $\ln C_t - \ln C_{t-1} \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ iid), $C_0 = 0$을 가정한다.

$\varepsilon_{x,t}$: 오차 (Fluctuation Risk)

본 모델은 장수리스크를 측정하는 것을 목적으로 하기 때문에, Fluctuation Risk는 오차 $\varepsilon_{x,t}$로 간주하였다. 참고적으로 이 모델을 continuous time으로 생각하면 사망률의 변화를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\ln C_{t+s} - \ln C_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 s) \Rightarrow \ln q_{x,t} = \ln \hat{q}_{x,t} + t \ln C_0 + \sigma Z(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}q_{x,t}}{q_{x,t}} = \frac{d\hat{q}_{x,t}}{\hat{q}_{x,t}} + \ln C_0 dt + \sigma dZ(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}q_{x,t}}{q_{x,t}} = \frac{d\hat{q}_{x,t}}{\hat{q}_{x,t}} + \sigma dZ(t),$$

여기서 Z(t)는 Brownian Motion을 뜻한다.

3.1.2 장수리스크의 Pricing (PV산출)

위의 모델을 바탕으로 본 연구는 Monte-Carlo Simulation과 (2)와 같은 식을 이용하여 연금의 현재가치(Present Value)를 산출해볼 것이다.

$$\begin{aligned} PV &= \sum_{i=1}^{m} CF_i e^{-ri} \\ &= \sum_{i=1}^{m} N_i P e^{-ri} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{i} (1 - q_{x,k})\, N_0 P e^{-ri} \end{aligned} \tag{2}$$

여기에서, 변수는 다음과 같다.

CF_i : 연도 i일 때, 보험회사가 연금으로 지출하는 금액

N_i : 연도 i일 때, 생존한 보험가입자의 수

P : 연금가입자가 받는 연금

r : 할인율

추가적으로 본 연구는 다양한 사망률 곡선을 통해 얻은 연금의 현재가치와 분산을 산출하여,

Value at Risk (VaR)을 구한다.

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(PV) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(PV > x) \leq 1 - \alpha\} \quad (3)$$

여기서, VaR은 (1- α)%의 신뢰수준에서 예측되는 최대 손실을 뜻한다.

3.2 분석 자료

본 논문은 위의 연구 분석을 위해 실제 1961년부터 2007년까지, 영국의 47개년간의 사망률 데이터를 사용하였다. 연구자들은 본래 우리나라의 사망률 데이터를 사용하여, 우리나라의 장수리스크를 분석하고자 하였다. 하지만 통계청 국가통계포털을 통해 얻을 수 있는 국내의 사망률 데이터는 불과 12개년 수준밖에 되지 못했다. 이에 연구자들은 12개년 수준의 샘플 데이터로 ARIMA와 ARCH 등의 시계열 분석을 할 경우, 자유도가 급격히 낮아져 유의미한 통계적 결과를 도출해내기 어렵다고 판단을 내렸고, 현재 장수리스크에 관한 연구가 가장 활발한 영국 시장의 사망률 데이터를 찾아 연구를 진행하였다. 실증 분석에 사용한 영국 시장의 사망률 데이터는 the Human Mortality Database (HDB)를 통해 얻을 수 있었다.

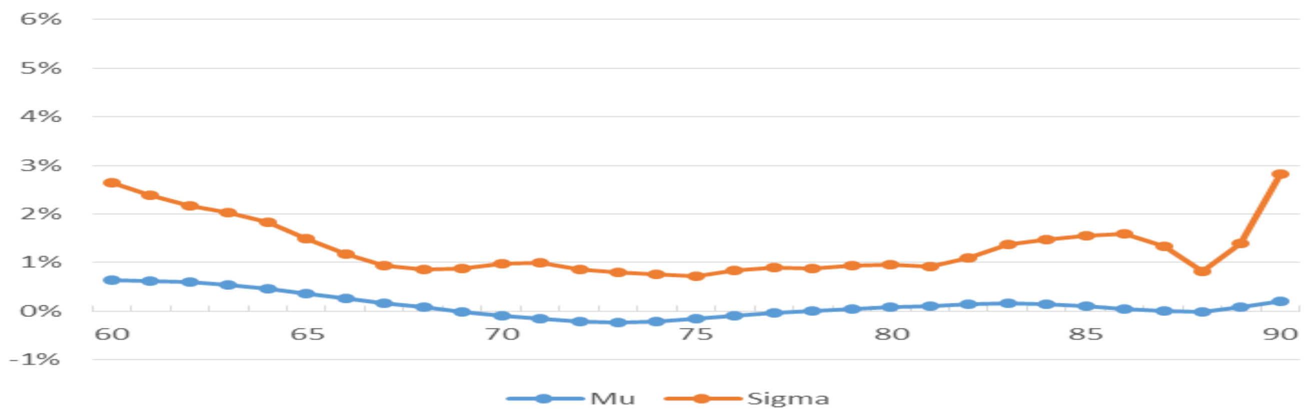
제 4 장. 연구 결과 및 해석

4.1 시뮬레이션 모델의 타당성 검정

앞서 연구방법에서 언급했던 모델과 가정들의 타당성을 검정하기 위해, 본 연구는 첫째, $\ln\frac{C_t}{C_{t-1}}$의 기대값과 변동성이 나이에 독립적이고 둘째, $\ln\frac{C_t}{C_{t-1}}$가 정규분포를 따른다는 것을 보이고자 한다.

① $\ln\frac{C_t}{C_{t-1}}$의 기대값과 변동성은 나이에 독립적이다.

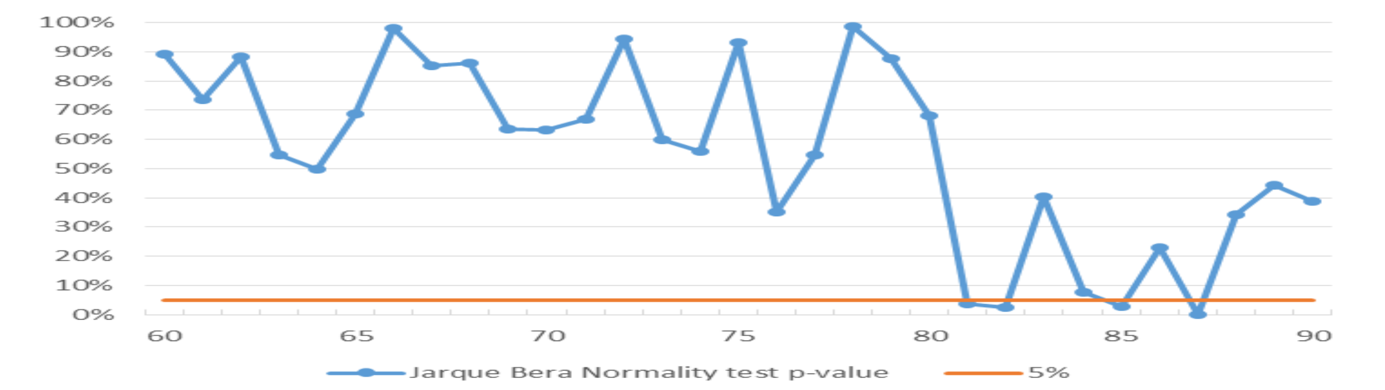
65세 미만 나이를 제외하고는, μ와 σ의 분포는 일정한 것으로 나타났다. 그리고 65세 이상부터는 μ의 경우 Box-Jenkins 시계열 모형 중에서 ARIMA(0,0,0)을 보여주고 Residual Squared Correlogram를 통해서도 알 수 있듯이, ARCH, GARCH 등의 Conditional Variance도 볼 수 없었다. 하지만 만약 ARIMA(0,0,0) 등이 아니더라도 Age-dependent C_t 를 생성하거나 Conditional Expectation을 바꾸는 등의 방법으로 어렵지 않게 모델을 변경할 수 있다. μ의 경우 기존의 65세 이전의 연령을 제외하고는 0과 유의미하게 다르지 않았다.



[그림 5] 연령대별 $\ln\frac{C_t}{C_{t-1}}$의 기대값과 변동성 분석 자료: 직접 작성

② $\ln\frac{C_t}{C_{t-1}}$ 는 정규분포를 따른다.

본 논문은 Jarque & Bera (1981)에서 연구한 Jarque Bera Statistical Test를 이용해서 X_t가 정규분포를 따르는지 확인했다. 각 나이대별 Jarque Bera Test의 P-Value는 아래 [그림 6]과 같다. Null hypothesis가 정규분포일 때 P-Value가 거의 모든 나이 대에서 5%를 훨씬 상회하므로, Jarque Bera Test에 의해 거의 모든 나이 대에서 정규분포를 따른다는 사실을 지지한다.

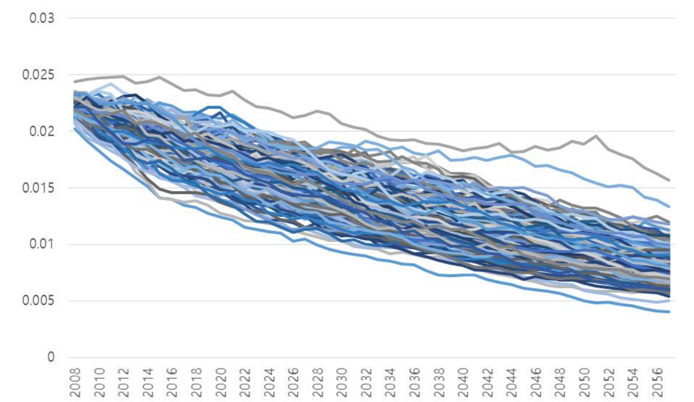


[그림 6] 연령대별 Jarque-Bera Normality Test P-Value 자료: 직접 작성

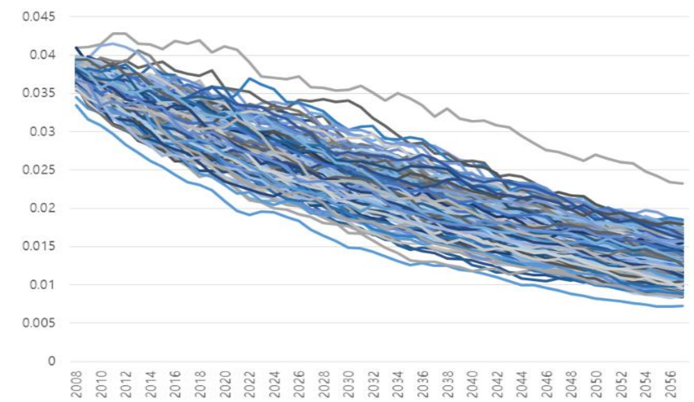
4.2 사망률 시뮬레이션 결과

앞서 모델의 타당성을 검증했으므로 본 논문은 연구방법에서 제시한 모델을 이용해 각 나이대별로 5000여개의 사망률 곡선을 생성했다. 아래 [그림 7~10]은 60세부터 90세까지의 사망률이 연도별로 어떻게 변화하는지를 보여준다.

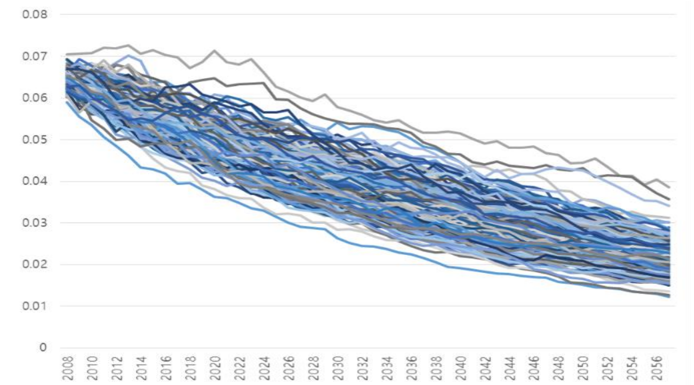
자료: 직접 작성



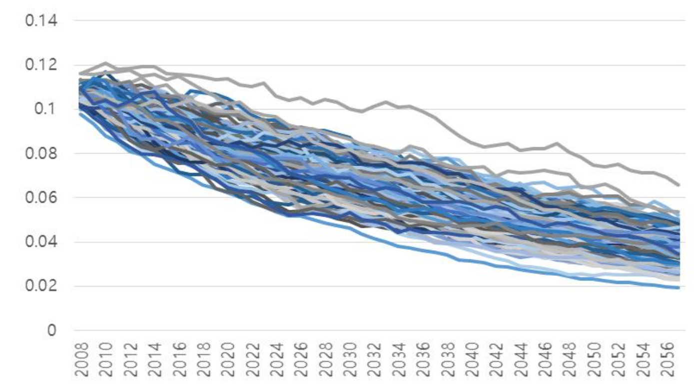
[그림 7] 장수리스크를 고려한 70세 사망률 곡선



[그림 8] 장수리스크를 고려한 75세 사망률 곡선



[그림 9] 장수리스크를 고려한 80세 사망률 곡선



[그림 10] 장수리스크를 고려한 85세 사망률 곡선

위의 그림들을 통해 알 수 있듯이, 각 사망률 곡선은 Lee-Carter 모형 등 기존의 사망률 모형이 예측하는 것과는 달리, 하나의 장기적인 사망률 트렌드를 따르지 않음을 알 수 있다. 또한 기존의 연구들이 기대 사망률과 prediction interval만을 보여주는 반면, 본 연구의 시뮬레이션 결과는 5,000개의 사망률 path를 보여줌으로써, 각 사망률 path에 따라 연금의 현재가치(PV)가 어떤 분포를 가지게 되는지에 대한 보다 정확한 예측을 할 수 있을 것으로 보인다.

4.3 연금의 현재가치(PV) 및 VaR 결과

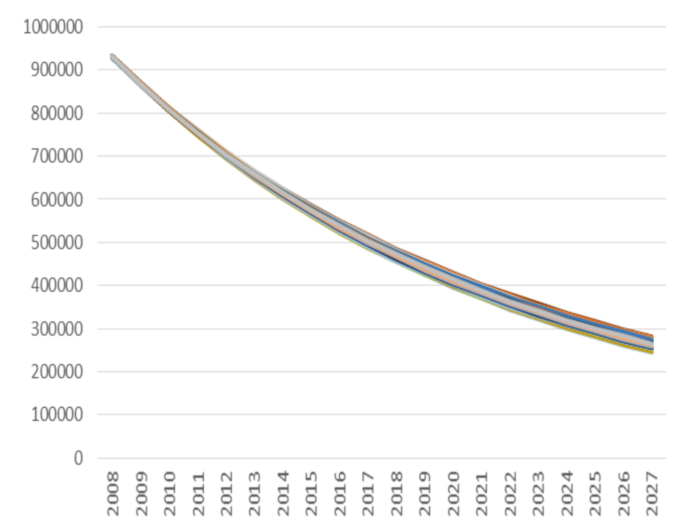
본 연구는 Monte-Carlo Simulation을 이용해 장수화 리스크를 고려한 PV와 그 분포 그리고 VaR를 산출하고자 하였다. 이에 앞서 설명한 μ를 이용하여 5,000여개의 Stochastic Process, C_t를 생성하고 연구방법론에서 제시한 계산식을 대입하여 PV 추이를 다음과 같이 계산하였다. PV를 산출하기 위한 가정은 다음과 같다.

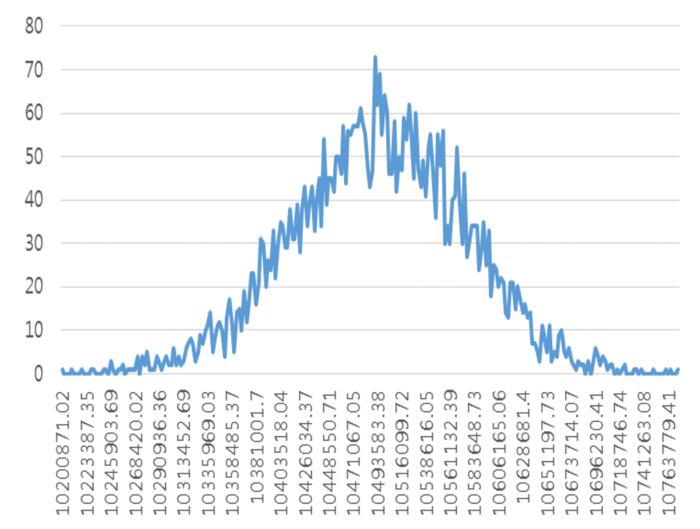
(1) 2008년 연초70세 x 100만명

(2) 생존자 年 1원 연금수령

(3) 할인율 年 5%

자료: 직접 작성





[그림 11] 시뮬레이션 결과에 따른 연금의 현재가치 [그림 12] 산출된 연금의 현재가치 분포

본 연구는 [그림 11] 같이, 장수리스크의 시뮬레이션 결과에 따라 각각 연금의 현재가치(PV)를 계산하여 다양한 사건에 대한 연금의 기대값을 예측해 볼 수 있었다. 또한 [그림 12]를 통해 알 수 있듯이, 산출된 연금의 현재가치 분포는 다음과 같고, 이를 통해 95%와 99%의 신뢰수준에

서 예측되는 최대 손실인 Value at Risk(VaR)을 각각 VaR(0.05)= 10622005.86, VaR(0.005)= 10698444 과 같이 계산하였다.

E(PV)	VaR(0.05)	VaR(0.005)
10493013.74	10622005.86	10698444

[표 1] 연금의 기대 현재가치 및 VaR(0.05), VaR(0.005)

제 5 장. 장수리스크 관리 방안

제5장에서는 두 가지 차원에서 장수리스크를 관리할 수 있는 방법을 연구했다. 첫째, 역선택으로 인한 장수리스크가 발생할 수 있음을 탐지하고, 이를 좀 더 정확하게 관리할 수 있는 방안을 제시할 것이다. 다음으로 자본시장을 통해 장수리스크를 분산시키는 헤징(Hedging)이 가능함을 수리적으로 분석해봄으로써 장수리스크를 관리하는 방법을 제안하고자 한다.

5.1 역선택(Adverse Selection)으로 인한 장수리스크

연구방법론에 제시된 모델과 4.1 모델 타당성 검사를 통해 다음과 같이 정의 내릴 수 있다.

$$X_t = \ln\frac{C_t}{C_{t-1}} \quad \text{where } C_t = \frac{q_{x,t}}{\hat{q}_{x,t}} \qquad (4)$$
$$(X_i)_{i\in N} \sim \mathrm{N}(0,\sigma^2) \text{ iid}$$

X_t를 (4)와 같이 정의하면 실제 사망률 $q_{x,t}$을 다음과 같이 표현할 수 있음을 알 수 있다.

$$\ln C_t - \ln C_{t-1} = X_t$$
$$\ln C_t = \ln C_0 + \sum_{i=1}^{t} X_i$$
$$= \sum_{i=1}^{t} X_i \ \text{(Random walk)}$$
$$\Rightarrow q_{x,t} = \hat{q}_{x,t} \times e^{\sum_{i=1}^{t} X_i}$$

따라서, 사망률 예측 모형이 실제 사망률을 실제와 근접하게 예측을 한다면 각 X_t는 $\frac{q_{x,t}}{\hat{q}_{x,t}} = e^{\sum_{i=1}^{t} X_i}$식에 의해 0에 가까워야 한다는 것을 알 수 있다. X_t가 0과 크게 다르다면 그 사망률 예측 모형에는 문제가 있음을 시사하고 있다.

또한, X_t는 실제 사망률의 성장률과 기대 사망률의 성장률의 차이, 즉 사망률 성장률의 오류라고 볼 수 있다는 것을 알 수 있다.

$$X_t = \ln\frac{C_t}{C_{t-1}}$$
$$= \ln\left(\frac{\frac{q_{x,t}}{\hat{q}_{x,t}}}{\frac{q_{x,t-1}}{\hat{q}_{x,t-1}}}\right)$$

$$= \ln\frac{q_{x,t}}{q_{x,t-1}} - \ln\frac{\hat{q}_{x,t}}{\hat{q}_{x,t-1}}$$

=(실제 사망률의 성장률) − (기대 사망률의 성장률)

그렇다면 다음과 같은 식을 유도해 볼 수 있다.

$$X_t^{(i)} = \alpha_i + \theta_i X_t^{(m)} + \varepsilon_{i,t} \tag{5}$$

여기에서, 변수는 다음과 같다.

α_i : 보험가입자 대표성의 오류
θ_i : $X_t^{(i)}$의 $X_t^{(m)}$대한 민감도
$\varepsilon_{i,t}$: 오류 (직관적인 설명을 위해 오류는 Gaussian White Noise라고 가정한다)
$X_t^{(m)}$: 한국 전체인구 사망률 성장률의 오류
$X_t^{(i)}$: 특정 연금상품 가입자 사망률 성장률의 오류

(5)번 식을 해석하면 다음과 같은 사실을 도출해 볼 수 있다.

θ_i는 한국 전체 인구의 사망률에 영향을 끼친 예상치 못한 변수가 특정 연금 가입자들의 사망률에 어떤 영향을 끼쳤는지 알려준다. 예를 들어 암 치료제의 개발로 전체 인구의 실제 사망률 성장률이 기대 사망률의 성장률 보다 작아졌다. 그러면 이 개발의 여파로 연금 가입자의 사망률 오차 성장률은 $\theta_i \Delta X_t^{(m)}$만큼 달라질 것으로 예상된다.

α_i는 특정 연금상품 가입자 사망률 성장률의 오류 $X_t^{(i)}$에서 한국 전체인구 사망률 성장률의 오류 $X_t^{(m)}$가 미치는 영향과 Gaussian White Noise로부터 파생되는 오류 $\varepsilon_{i,t}$를 제외한 곳에서 온 오류를 뜻 한다. 다시 말하면 $X_t^{(m)}$처럼 우리나라 인구 전체에 영향을 끼치는 충격(Shock)과 관련된 오류가 아니라, 보험가입자 집단에게만 보여지는 사망률 성장률 오류라는 것이다. 이는 보험가입자 집단을 선택하는 것으로부터 파생된 오류라는 것을 알 수 있다. 특히 $\alpha_i < 0$는 실제 사망률의 성장률이 기대했던 것 보다 더 작다는 것을 말한다. 이는 곧, 보험가입자 집단을 선정하는데 역선택이 있었음을 시사하고 역선택으로 인한 장수리스크가 연금 포트폴리오에 존재한다는 것을 뜻한다. 보다 쉬운 이해를 위해서 다음을 참고할 수 있다.

$$X_t^{(i)} = \alpha_i$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{q_{x,t}}{q_{x,t-1}} = \ln\frac{\hat{q}_{x,t}}{\hat{q}_{x,t-1}} + \alpha_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{q_{x,t}}{q_{x,t-1}} = \frac{\hat{q}_{x,t}}{\hat{q}_{x,t-1}} e^{\alpha_i}$$

여기서 $\frac{\hat{q}_{x,t}}{\hat{q}_{x,t-1}}$를 임의의 상수라고 가정하면, α_i의 변화는 예측하지 못한 상태로 영구적으로 변화할 가능성이 있고, 이는 곧 사망률의 성장률(감소율)의 영구적인 변화, 즉, 장수리스크를 초래한

다는 것을 알 수 있다.

만약, 보험회사가 다양한 연금가입자 포트폴리오를 구축하고 있다면 다음과 같은 가중을 통해 포트폴리오의 대표성 오류를 산출해 볼 수 있다.

$$X_t^{(P)} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{q_{i,x,t-1}}{\hat{q}_{i,x,t-1}}X_t^{(i)}\right)}{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{q_{i,x,t-1}}{\hat{q}_{i,x,t-1}}\right)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} w_i^{(P)} X_t^{(i)}$$

이와 같이 가중치를 주면 $X_t^{(P)}$를 (6)과 같이 표현할 수 있다.

$$X_t^{(P)} = \alpha_P + \delta X_t^{(m)} + \mathrm{V}_{P,t-1} \tag{6}$$

여기에서, 변수는 다음과 같다.

$$\alpha_P = \sum w_i^{(P)} \alpha_i$$
$$\delta = \sum w_i^{(P)} \theta_i$$
$$V_{P,t-1} = \sum w_i^{(P)} V_{i,t}$$

따라서, $E[X_t^{(P)}] = \alpha_P + \delta X_t^{(m)}$, $\mathrm{Var}\left[X_t^{(P)}\right] = \delta^2 Var\left[X_t^{(m)}\right] + \sum {w_i^{(P)}}^2 \sigma_V^2$이고 $\mathrm{R}^2 = \frac{\delta^2 Var\left[X_t^{(m)}\right]}{\delta^2 Var\left[X_t^{(m)}\right] + \sum {w_i^{(P)}}^2 \sigma_V^2}$이다. 이 모델을 통해서 역선택이 보험회사에 장수리스크를 증폭시키고 있는지 판단할 수 있고, 적절한 가중을 이용해 $\alpha_P \geq 0$로 만들어 장수리스크를 최소화시키는 것이 가능할 것이다. 또한, 이 모델은 만약 보험회사의 연금 포트폴리오가 $\alpha_P \neq 0$를 보인다면, 미래에 유동성이 충분한 장수리스크 파생상품 시장이 형성이 되고 거래되더라도, 한국 전체인구의 사망률을 토대로 값이 매겨진 파생상품으로는 완벽한 헤징을 기대하기 힘들 수 있다는 것을 알려준다.

5.2 장수리스크의 헤징 가능성

만약, 유동성이 충분한 장수리스크 파생상품 시장이 존재한다면 선물, 옵션 등을 이용하여 다양한 헤징 전략을 취하고 Black-Scholes formula 등을 이용하여 선물의 공정가격 등을 산출해 볼 수 있겠지만 현재 그런 파생상품 시장은 한국에 존재하지 않는다. 따라서, 파생상품을 이용한 헤징 대신 유동성이 큰 자본시장에서 포트폴리오 이론을 토대로 장수리스크를 헤징할 수 있는 방법을 제안하고자 한다.

본 연구는 분산투자로 최소화시킬 수 있는 금융상품들의 고유 리스크를 제외한 나머지 리스크를 3개의 포트폴리오로 구성해 제거하고자 한다.

먼저, 연도 t에 보험사에서 지급해야 할 연금의 금액을 CF_t라고 할 때, 지급금의 성장률 r_D은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
r_D &= \ln \frac{CF_{t+1}}{CF_t} \\
&= \ln \frac{PN_t\left(1 - q_{x,t}\right)}{PN_t} \\
&= \ln\left(1 - q_{x,t}\right)
\end{aligned}
$$

따라서, 지급금의 성장률을 보험사에서 운용 중인 각 연금과 한국 전체 인구의 r_D를 구할 수 있다. 그러면 Least Squares Regression을 통해서 (7)과 같은 관계식을 도출 할 수 있다.

$$
r_{D,i,t} - r_f = \alpha_i + \theta_i(r_{D,m,t} - r_f) + V_{i,t} \tag{7}
$$

여기에서, 각 변수는 다음과 같다.

$r_{D,i,t}$	: 보험사에서 운용중인 연금 i의 지급금 성장률
r_f	: 무위험 자산율
α_i	: 초과 수익
θ_i	: $r_{D,i,t} - r_f$의 $r_{D,m,t} - r_f$에 대한 민감율
$r_{D,m,t}$	: 한국 전체의 r_D (지급금의 성장률)
$V_{i,t}$	: 오류 (Gaussian White Noise: ARIMA(p,q,r), GARCH-M등 조건부 기대값 혹은 분포를 가지는 가정할 수도 있지만 설명을 위해 Gaussian White Noise라고 가정을 한다.)

$r_{D,i,t} - r_f$에 지급금 규모를 바탕으로 한 가중합으로 (8)과 같은 식을 도출해낼 수 있다.

$$
r_{D,P,t} - r_f = \alpha_P + \theta_P(r_{D,m,t} - r_f) + V_{P,t} \tag{8}
$$

여기서

$$
\begin{aligned}
\alpha_P \quad &= \sum w_{D,i}\alpha_i \\
\theta_P \quad &= \sum w_{D,i}\theta_i \\
V_{P,t} \quad &= \sum w_{D,i}V_{P,t} \\
w_{D,i} \quad &= \frac{CF_{i,t}}{\sum CF_{i,t}} \; (0 \le w_{0,i} \le 1, \sum w_{D,i} = 1)
\end{aligned}
$$

다음으로, Arbitrage Pricing Theory (APT)를 바탕으로 한 모델을 이용해 θ_P를 제거하기 위한 포트폴리오를 생성한다.

$$
r_{i,t}^{(n_1)} - r_f = \alpha_i^{(n_1)} + \beta_i^{(n_1)}\left(r_{m,t} - r_f\right) + \theta_i^{(n_1)}(r_{D,m,t} - r_f) + \varepsilon_{i,t}^{(n_1)} \tag{9}
$$

여기서

$\alpha_i^{(n_1)}$: $\beta_i^{(n_1)}$와 $\theta_i^{(n_1)}$가 neutral할 때 주어지는 리턴, 즉 excess return을 뜻한다.
$r_{i,t}^{(n_1)}$: 시장의 Risk Premium 및 $r_{D,m,t} - r_f$에 상관관계를 보이는 금융 상품을 뜻한다.

Silver 산업 등 인구의 사망률과 직접적인 연관이 있는 기업 주식의 수익률 $r_{i,t}^{(n_1)}$은 $r_{D,m,t} - r_f$에 민감할 것이라고 예상한다.

(9)와 비슷한 개념으로 $r_{i,t}^{(n_1)}$의 포트폴리오를 구성하면 (10)과 같다.

$$r_{P,t}^{(n_1)} - r_f = \alpha_P^{(n_1)} + \beta_P^{(n_1)}(r_{m,t} - r_f) + \theta_P^{(n_1)}(r_{D,m,t} - r_f) + \varepsilon_{P,t}^{(n_1)} \tag{10}$$

여기서

$$r_{P,t}^{(n_1)} = \sum w_i^{(n_1)} r_{i,t}^{(n_1)}$$
$$\alpha_P^{(n_1)} = \sum w_i^{(n_1)} \alpha_i^{(n_1)}$$
$$\beta_P^{(n_1)} = \sum w_i^{(n_1)} \beta_i^{(n_1)}$$
$$\theta_P^{(n_1)} = \sum w_i^{(n_1)} \theta_i^{(n_1)}$$
$$\varepsilon_{P,t}^{(n_1)} = \sum w_i^{(n_1)} \varepsilon_{i,t}^{(n_1)}$$

Use $w_i^{(n_1)}$ such that $\sum w_i^{(n_1)} = 1$

마지막으로, Index model을 이용해 $r_{D,m,t}$와 상관관계가 없는 주식들로 차후 포트폴리오의 market risk를 제거하기 위한 포트폴리오를 구성한다.

$$r_i^{(n_2)} - r_f = \alpha_i^{(n_1)} + \beta_i^{(n_2)}(r_{m,t} - r_f) + \varepsilon_{i,t}^{(n_2)}$$

$$r_P^{(n_2)} - r_f = \alpha_i^{(n_1)} + \beta_P^{(n_2)}(r_{m,t} - r_f) + \varepsilon_{P,t}^{(n_2)}$$

$$\sum w_i^{(n_2)} = 1$$

이렇게 만들어진 세 개의 포트폴리오에 적당한 가중치를 두어 (11)과 같은 성격을 가지는 금융 포트폴리오를 구성한다.

$$r_{P,t}^{*} = w_1^{*} r_{D,P,t} + w_2^{*} r_{P,t}^{(n_1)} + w_3^{*} r_{P,t}^{(n_2)} + r_f \tag{11}$$

(11)번 식은 다음을 만족한다.[10]

[10] 음의 상수인 가중치는 Short Position을 의미한다. 만약, Short Position을 취하는 것이 법적으로 불가능한 경우에는 관련된 Put Option과 Call Option 그리고 채권 등의 적절한 조합으로 Synthetic Stock을 만들어 포트폴리오를 구성 할 수 있다.

$$w_1^* \theta_P + w_2^* \theta_P^{(n_1)} = 0$$

$$w_2^* \beta_P^{(n_1)} + w_3^* \beta_P^{(n_2)} = 0$$

$$\text{and} \sum_{i=1}^{3} w_i^* = 1$$

이 때, (8)~(10) 식을 (11)에 대입하면 다음과 같이 (12)가 성립한다.

$$r_{P,t}^* = w_1^* \alpha_P + w_1^* V_{P,t} + w_2^* \varepsilon_{P,t}^{(n_1)} + w_3^* \varepsilon_{P,t}^{(n_2)} \tag{12}$$

이렇게 만들어진 최종적인 포트폴리오는 다음과 같이 두 가지의 중요한 함의를 갖는다.

A. $\mathrm{E}[r_{P,t}^*] = w_1^* \alpha_P$

고객의 다양화는 $w_1^* \sum w_{D,i} \alpha_i$ 에서 w_1^*, $w_{D,i}$, α_i 의 값에 따라 최종 포트폴리오의 기대수익률 $\mathrm{E}[r_{P,t}^*]$ 이 0이 될 수도 임의의 상수가 될 수도 있다. α_i의 값은 연금가입자 선택에서 파생되어 나온 초과 수익/손해이기 때문에 보험가입자 유치를 적절히 해서 $w_1^* \sum w_{D,i} \alpha_i \geq r_f$ 이 되도록 만들어야 할 것이다.

B. $\mathrm{Var}[r_{P,t}^*] = w_1^{*2} \mathrm{Var}(V_{P,t}) + w_2^{*2} \mathrm{Var}\left(\varepsilon_{P,t}^{(n_1)}\right) + w_3^{*2} \mathrm{Var}\left(\varepsilon_{P,t}^{(n_2)}\right)$

$$= w_1^{*2} \sum w_{D,i}{}^2 \sigma_V{}^2 + w_2^{*2} \sum {w_i^{(n_1)}}^2 \sigma_{n_1}{}^2 + w_3^{*2} \sum {w_i^{(n_2)}}^2 \sigma_{n_2}{}^2$$

포트폴리오 분산투자를 통해 각 가중치 $w_1^* w_{D,i}{}^2, w_2^* {w_i^{(n_1)}}^2, w_3^* {w_i^{(n_2)}}^2$ 가 0으로 수렴하므로 최종 포트폴리오의 분산 역시 0으로 수렴하게 된다. 분산이 0으로 수렴한다는 것은 연금 포트폴리오의 모든 리스크를 자본시장을 이용하여 헤징을 구현하였다는 것을 뜻한다. 이는 고유 리스크를 분산시켜 제거하는 포트폴리오 이론의 논리와 동일하다. 또한, 분산이 0일 때, 할인율은 r_f 가 될 것이다.

제 6 장. 결론 및 한계

6.1 결론

본 연구의 주제인 고령화 문제는 현재 전세계적으로 큰 화두로 떠오르고 있으며, 앞으로 우리나라에서도 생명보험회사를 중심으로 이와 관련한 논의가 활발히 진행될 것으로 보인다. 보다 구체적으로 빠르게 고령화 되어가고 있는 국내의 인구구조는 생명보험회사로 하여금 연금보험의 비중 확대를 불가피하게 만들 것이며, 생명보험회사도 이에 맞게 장수리스크에 대한 관심을 제고해야 할 것이다. 하지만 국내외적으로 장수리스크의 측정과 관리에 대한 기존 연구들은 동일한 모델을 바탕으로 일정 수준 이상의 논의를 이끌어내지 못하고 있으며, 실제 그 분석에도 많은 한계를 담고 있는 것이 사실이다. 이에 본 논문은 크게 1) 측정, 2) 가격책정, 3) 관리방안 이렇게 3 가지 양적 연구를 통해, 생명보험회사들로 하여금 장수리스크에 대한 관심을 높이고, 기존 연구들의 분석을 넘어서 보다 현실적이고 체계적인 분석을 담고자 하였다.

우선 본 연구는 생명보험회사들에게 장수리스크를 적절히 측정하는 방법을 제안하고자 한다. 장수리스크의 측정과 관련한 기존의 연구들은 고정된 사망률 트렌드를 설정하고 이의 영구적인 변화를 체계적으로 고려하지 못했다는 한계를 가지고 있다. 또한 기존 연구들은 기대 사망률과 예측간격(Prediction Interval)을 제시하였지만, 실제 사망률이 어떤 곡선(path)를 따르는 지에 대한 고려는 하지 않았다는 점에서 한계를 갖는다. 하지만 본 논문은 기존의 사망률 모형에 실제 사망률이 랜덤워크를 따른다는 가정을 추가한 후, Monte-Carlo 시뮬레이션을 수행함으로써 사망률 트렌드가 갖는 다양한 path 의 변화를 고려하였다. 따라서 본 연구가 제안한 장수리스크 측정 방법은 기존 연구들이 갖는 한계를 보완하고, 실제 생명보험회사들이 가지고 있는 보다 정교한 데이터를 통해 장수리스크를 체계적으로 측정하는 데 기여할 것으로 보인다.

다음으로 본 연구는 사망률 시뮬레이션을 통해, 다양한 사망률 path 를 구한 후, 각각의 현재가치(PV)를 산출하고, 이의 분포와 VaR 을 구하는 데 성공하였다. 연금의 현재가치는 사망률 곡선에 따라 큰 차이가 있었고, 각각의 사망률 곡선이 갖는 현재가치는 실제 생명보험회사가 판매하는 연금의 현재가치와 비교하여 그 손익을 체계적으로 분석하는 데 도움이 될 것으로 보인다. 또한 본 연구의 이러한 성과는 기존 연구가 고려하지 못한 사망률 변화, 그리고 그에 따른 현재가치의 변화 추이를 실제로 보여줌으로써, 기존 연구가 예측하지 못한 장수리스크로 인한 생명보험회사의 손실을 측정해볼 수 있다는 점에서 큰 의미를 가질 것으로 보인다.

끝으로, 본 연구는 생명보험회사가 장수리스크를 관리할 수 있는 방안을 크게 2 가지 방식에 초점을 맞춰 제안해 보고자 하였다. 생명보험회사는 고객들의 역선택으로 인해, 장수리스크를

가질 수 있게 되고, 본 논문은 연금 상품 포트폴리오의 가중치를 조정하여 어떻게 하면 그 리스크를 최소화할 수 있는지에 대해 수리적으로 분석해 보았다. 다음으로 본 연구는 국내의 경우 아직 장수 파생상품 시장이 형성되지 않았다는 점을 인지하고, 기존의 국내 연구들이 헤징과 관련해 제안했던 질적 담론을 넘어서, 실제 자본시장을 이용한 헤징 가능성을 제안하였다. 구체적으로 본 논문은 포트폴리오 이론을 바탕으로 연금 지급액의 성장률과 상관관계가 있는 자본 시장 (i.e. 주식)을 이용해 헤징이 가능함을 분석해 보았다. 본 연구의 이러한 장수리스크 관리방안은 기존의 연구들이 제안한 연금상품의 다양화 혹은 시장 확대와 같은 질적인 수준의 헤징 방안보다 현실적이고 실질적이라는 점에서 큰 의의를 가질 것으로 보인다.

6.2 연구의 한계

① 데이터의 부족

본 연구는 기본적으로 1961 년부터 2007 년까지, 영국의 47 개년간의 사망률 데이터를 바탕으로 위의 양적 연구들을 수행하였다. 본래 연구는 국내 시장의 데이터를 바탕으로, 우리나라의 장수리스크를 측정하고 이를 분석해보려고 하였지만, 통계청을 통해 얻을 수 있는 데이터는 불과 12 개년밖에 되지 못했고, 본 논문은 연구의 정확성을 위해 불가피하게 영국 시장의 데이터를 사용할 수밖에 없었다. 또한 본 논문은 시뮬레이션을 통해 연금의 현재가치를 구하는 데는 성공하였지만, 이를 실제 생명보험회사의 연금 현재가치와 비교하고 그 차이를 통해 발생하는 손익을 분석하기 위해서는 필수적으로 생명보험회사가 가지고 있는 고객들의 데이터를 분석해야만 했다. 하지만 기업의 의뢰를 받지 않고 독립적으로 연구를 수행하는 대학 학부생의 입장에서, 생명보험회사의 내부 데이터를 구하는 일은 쉽지 않았다. 본 논문은 이를 본 연구의 한계이자 동시에 후행 연구의 가능성으로 남겨두고자 한다.

② 연구 모델 가정의 한계

본 논문은 외국에서 새롭게 유입되는 인구가 없음을 가정하고 연구를 진행했다. 따라서 인구 유입이 많은 국가에서 본 연구 모델을 사용한다면, 그에 따른 추가적인 고려가 필요할 것으로 보인다. 그리고 우리는 리스크 관리 방안에서 다양한 변수들이 유의미한 상관관계를 가진다고 가정했다. 특히, 자본시장에 연금 지급금의 성장률 $\mathrm{r}_{D,P,t}$과 상관관계를 갖는 금융상품이 있다는 중요한 가정을 했다. 물론 사망률의 예측되지 못한 변화에 영향을 받을 여러 산업들—Silver 산업, Health Care 산업 등—이 충분히 $\mathrm{r}_{D,P,t}$과 상관관계를 가질 것이라 생각하지만, 본 논문은 실질적인 테스트로 검증하지 못했다. 따라서 이에 대한 연구가 앞으로 더 필요할 것으로 보인다.

참고문헌

Browne, B., Duchassaing, J., & Suter, F. (2009). Longevity: A ‘Simple’Stochastic Modelling of Mortality. *British Actuarial Journal*, *15*(S1), 249-265.

Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2002). *Investments* (7th ed.). Boston, MA: McGraw-Hill/Irwin.

Cairns, A. J., Blake, D., & Dowd, K. (2008). Modelling and management of mortality risk: a review. *Scandinavian Actuarial Journal*, *2008*(2-3), 79-113.

Currie, I. D., Durban, M., & Eilers, P. H. (2004). Smoothing and forecasting mortality rates. *Statistical modelling*, *4*(4), 279-298.

Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting US mortality.*Journal of the American statistical association*, *87*(419), 659-671.

김세중. (2014). 장수리스크 관심 확대와 시사점. *KIRI Weekly,* 286(단일호), 1-8.

김대환, 류건식, & 김동겸. (2012). 보험회사의 장수리스크 발생원인과 관리방안.*정책경영보고서*, *2012*(4), 137-311.

성주호. (2010). 종신연금과 종신보험의 사망 리스크 헤징 포트폴리오 전략에 관한 연구. *보험금융연구*, *60*(단일호), 3-36.